На правах рукописи

УДК 517.917

БЫКОВА ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНА

ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск – 2005

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Тонков Евгений Леонидович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Долгий Юрий Филиппович

доктор физико-математических наук, доцент Попова Светлана Николаевна

Ведущая организация: Институт математики Национальной Академии наук Беларуси

Защита состоится «____» ______________ 2005 г. в 14^{00} на заседании диссертационного совета К 212.275.04 в ГОУ ВПО «Удмуртский государственный университет» по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), ауд. 222. E-mail: *imi@uni.udm.ru*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан «____» ______________ 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Петров Н.Н.

Актуальность темы. Линейная система с последействием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \tag{1}$$

может иметь решения $x(t)$, обращающиеся в нуль (с возрастанием t) по истечении конечного промежутка времени, либо не обращающиеся в нуль, но стремящиеся к нулю быстрее любой экспоненциальной функции (см. монографию Дж. Хейла[1)]). Это означает, что показатель Ляпунова $\lambda(x) \doteq \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\ln|x(t)|}{t}$ этого решения равен $-\infty$.

Игнорируя такие решения, мы можем задаться следующим вопросом: будет ли система (1), рассматриваемая только на множестве нетривиальных решений $x(t)$ с конечными показателями Ляпунова $\lambda(x)$, асимптотически подобна некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений? Правда, может оказаться, что пространство решений с конечными показателями Ляпунова (дополненное, конечно, тривиальным решением, показатель Ляпунова которого заведомо равен $-\infty$) бесконечномерно, а количество различных показателей таких решений по меньшей мере счетно.

Одной из актуальных задач асимптотической теории систем вида (1) является задача выяснения условий, при которых сужение системы (1) на любое конечномерное подпространство решений с конечными показателями Ляпунова, асимптотически подобно некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это важное свойство подобия обыкновенной системе полезно при изучении асимптотических инвариантов систем с последействием. Неявно оно отмечалось для систем с периодической по t матрицей $A(t,s)$[2)3)4)], но в общей ситуации не исследовалось.

Отметим, кроме того, что вопросам асимптотического поведения решений периодических систем с последействием и более общих периодических систем нейтрального типа посвящены работы

[1)] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. 421 с.

[2)] *Stokes A.* Floquet theory for functional-differential equations // Proc. Nat. Ac. of Sci., 48:8, 1962. PP. 1330–1334.

[3)] *Шиманов С. Н.* Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием // В сб. «Пятая летняя матем. школа», Киев, 1968. С. 473–549.

[4)] *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. 352 с.

Ю. Ф. Долгого и С. Н. Шиманова[5)] Ю. Ф. Долгого[6)7)], и Ю. Ф. Долгого и В. С. Тарасяна[8)].

Цель данной работы. Основной целью работы является выяснение условий, при которых сужение системы (1) на всякое конечномерное подпространство существенных (то есть имеющих конечные показатели А. М. Ляпунова) решений асимптотически подобно системе обыкновенных дифференциальных уравнений с ограниченной матрицей коэффициентов. Кроме того, в работе изучаются условия, при которых пространство существенных решений системы (1) конечномерно и исследуется вопрос о равномерной экспоненциальной устойчивости системы (1) и грубости свойства равномерной экспоненциальной устойчивости.

Научная новизна. Построены основы теории асимптотического подобия систем с последействием и систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть в дальнейшем применены при исследовании задач управления асимптотическими инвариантами управляемых систем с последействием.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (Ижевск, 2002 – 2005 годы), на конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 80-летию профессора Н. В. Азбелева (Ижевск, 2002), на Международной конференции, посвященной 100-летию А. Н. Колмогорова (Тамбов, ОПУ — 2003), на Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач «Понтря-

---

[5)] *Долгий Ю. Ф., Шиманов С. Н.* Устойчивость периодической системы дифференциальных уравнений нейтрального типа // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск. 1982. С.32–39.

[6)] *Долгий Ю. Ф.* Асимптотика собственных чисел оператора монодромии для периодических уравнений с запаздыванием // Изв. ВУЗ-ов. Математика. 1994. № 11. С.64–72.

[7)] *Долгий Ю. Ф.* Устойчивость периодических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Дис. на соискание степени доктора физ.-мат. наук. Екатеринбург — 1994. 296 с.

[8)] *Долгий Ю. Ф., Тарасян В. С.* Конечномерные операторы монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием // Изв. УрГУ. Математика. 2000. № 18. С. 18–27.

гинские чтения — XV», посвященной 65-летию академика В. А. Садовничего (Воронеж, 2004).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в шести работах, в том числе в журналах «Дифференциальные уравнения» и «Труды Института математики и механики УрО РАН».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, восьми параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы. Объем диссертации 108 страниц. Библиографический список содержит 34 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении описывается общая постановка задачи и излагается краткое содержание работы.

Основная часть диссертации посвящена изучению вопроса об асимптотическом подобии сужений системы (1) на конечномерные подпространства существенных решений, системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

На протяжении этой работы предполагается, что интеграл Стилтьеса в (1) рассматривается по переменной s, $x_t(s) = x(t+s)$, функция $(t,s) \to A(t,s)$ ограничена в полосе $\mathbb{R} \times [-r, 0]$, равномерно непрерывна по t, имеет ограниченную вариацию по s, $A(t,-r) \equiv 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $|\tau| \leqslant \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\int_{-r}^{0} |A(t+\tau, s) - A(t,s)|\, d\, s \leqslant \varepsilon$. Подробно эти условия, которые далее будем называть естественными, описаны **в первом параграфе**. В дальнейшем систему (1) будем отождествлять с задающей ее функцией A, а пространство всех систем A, удовлетворяющих естественным условиям, обозначать $\mathfrak{A}$.

В качестве пространства начальных функций рассматривается пространство $\mathfrak{S}$ всех непрерывных функций $u : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ либо с L_2-нормой $\|u(\cdot)\|_2 = \left(\int_{-r}^{0} |u(s)|^2 ds\right)^{1/2}$, либо с равномерной нормой $\|u\|_0 = \max\limits_{t\in[-r,0]} |u(t)|$ (в последнем случае $\mathfrak{S}$ становится банаховым пространством и совпадает с пространством $C([-r,0], \mathbb{R}^n)$).

Для каждого момента времени t_0 и любой непрерывной функции

$u \in \mathfrak{S}$ решением $t \to x(t, t_0, u)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

$$x(t) = u(t - t_0) \quad \text{при} \quad t \in [t_0 - r, t_0], \tag{3}$$

будем называть непрерывную на $[t_0 - r, \infty)$ функцию, совпадающую с функцией $u(t - t_0)$ при $t \in [t_0 - r, t_0]$ и обращающую систему (2) в тождество при $t \geqslant t_0$ (здесь $x_t(s) = x(t + s)$, $s \in [-r, 0]$).

Всякое решение $t \to x(t, t_0, u)$ задачи (2), (3) порождает движение $t \to x_t(\cdot, t_0, u) \doteq x_t(t_0, u)$ в пространстве $\mathfrak{S}$, $t \geqslant t_0$ (для краткости при $t_0 = 0$ вместо $x_t(\cdot, 0, u)$ пишем $x_t(u)$).

В этой работе мы придерживаемся концепции, предложенной Н. Н. Красовским[9], состоящей в том, что системе $\dot{x}(t) = v(x_t)$, обладающей свойством непрерывной зависимости и глобальной правосторонней единственности решения задачи Коши, отвечает некоторая динамическая система с фазовым пространством $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ и потоком на нем $t \to x_t$, порожденным решениями этой системы. Эта концепция оказалась естественной и очень плодотворной при изучении асимптотического поведения решений системы (1).

Во втором параграфе описана методика преобразования задачи

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x_t(s), \quad t \in (0, \infty), \tag{4}$$

$$x(t) = u(t), \quad t \in [-r, 0], \tag{5}$$

к системе

$$x^{k+1}(t) = C(t, kr)x^k(kr) + \\ + \int_{kr}^{t} C(t,\tau)q(\tau, x^k(\cdot))d\tau, \quad t \in (kr, (k+1)r], \tag{6}$$

где $k = 0, 1, \ldots,$ функция $x^0(t)$ совпадает при $t \in [-r, 0]$ с функцией $u(t)$, а $q(t, x^k(\cdot)) = \displaystyle\int_{t-r}^{kr} dQ(t,\tau)x^k(\tau)$ при $t \in [kr, (k+1)r]$. Таким

[9] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения (линейные системы). — М.: Гос. издат. физ.-матем. лит. 1959. 211 с.

образом, при каждом $k = 0, 1, \ldots$ и всех $t \in [kr, (k+1)r]$ имеет место равенство $x(t, u(\cdot)) = x_{(k+1)r}(s)$, где $s \in [-r, 0]$, $t = s + (k+1)r$.

Показано, что эта методика не позволяет «улавливать» негрубые свойства системы (4), а также свойства устойчивости, равномерные относительно сдвигов системы. Однако, равенство (6) можно применять при получении оценок экспоненциального роста решений системы (4)[10]. Действительно, обозначим

$$\|x^k\| = \|x_{kr}\|_0 = \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} |x_{kr}(s)|,$$

тогда найдется константа α такая, что при всех $t \in [kr, (k+1)r]$ выполнено неравенство $|q(t, x^k(\cdot))| \leqslant \alpha \|x^k\|$. Пусть далее,

$$\beta_k = \max_{(t,\tau) \in \Delta_k} |C(t, \tau)|, \quad \text{где} \quad \Delta_k = \{(t, \tau) \,:\, kr \leqslant \tau \leqslant t \leqslant (k+1)r\}.$$

Из (6) следует неравенство

$$|x^{k+1}(t)| \leqslant \beta_k |x^k(kr)| + \beta_k \alpha \|x^k\|, \quad kr \leqslant t \leqslant (k+1)r,$$

из которого, в свою очередь, получаем (при каждом k) неравенства

$$\|x^k\| \leqslant \|u\|_0 (1 + \alpha)^k \prod_{j=0}^{k-1} \beta_j, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

В частности, если $|C(t, \tau)| \leqslant N \exp \lambda(t - \tau)$ для всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$ и некоторых констант N и λ, то $\beta_k \leqslant N \exp(\lambda r)$. Поэтому непосредственно из (7) для всех $k = 1, 2, \ldots$ получаем неравенства

$$\|x^k\| \leqslant \|u\|_0 (1 + \alpha)^k N^k \exp(\lambda k r).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение:

для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа N_ε, что для всякой начальной функции $u \in \mathfrak{S}$ и всех $t \geqslant 0$ решение $x(t, u)$ задачи (4), (5) *допускает экспоненциальную оценку*

$$|x(t, u)| \leqslant N_\varepsilon \|u\|_0 \exp(\lambda + \varepsilon) t.$$

---

[10] *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. 280 с.

Поэтому, если $\lambda < 0$, то тривиальное решение системы (4) *экспоненциально устойчиво.*

В третьем параграфе исследуется вопрос о равномерной экспоненциальной устойчивости системы (1). Этот вопрос для систем, не обладающих свойством периодичности, не исследован.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что система (1) удовлетворяющая естественным условиям, C-равномерно экспоненциально устойчива, если найдутся такие константы $\lambda > 0$ и $M > 0$, что для всякого движения $t \to x_t(\cdot)$, порожденного системой (1), для любого $t_0 \geqslant 0$ и всех $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\|x_t(\cdot)\|_0 \leqslant M\|x_{t_0}(\cdot)\|_0 \exp\bigl[-\lambda(t-t_0)\bigr].$$

Т е о р е м а 1. *Система* (1), *удовлетворяющая естественным условиям, C-равномерно экспоненциально устойчива в том и только в том случае, если показатель Боля*

$$\mathfrak{B}_0(A) \doteq \varlimsup_{t-\tau\to\infty} \frac{\ln\|X(t,\tau)\|_{\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}}}{t-\tau}, \quad \mathfrak{S} = C([-r,0],\mathbb{R}^n),$$

системы (1) *удовлетворяет неравенству* $\mathfrak{B}_0(A) < 0$.

Аналогичным образом вводится понятие L_2-равномерной экспоненциальной устойчивости.

Далее, пусть $\mathfrak{A}_0$ — подпространство всех систем из $\mathfrak{A}$, обладающих свойством «продолжаемости влево» (см. утверждение в) формулируемой ниже теоремы 4).

Т е о р е м а 2. *Свойство C-равномерной экспоненциальной устойчивости на пространстве $\mathfrak{A}_0$ с метрикой*

$$\varrho(A,B) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\Bigl(|A(t,0)-B(t,0)| + \int_{-r}^{0}|A(t,s)-B(t,s)|\,ds\Bigr)$$

является грубым свойством.

Доказательство этой теоремы использует формулируемую ниже лемму, представляющую самостоятельный интерес.

Л е м м а 1. *Показатель Боля $\mathfrak{B}_0(A)$ системы $A \in \mathfrak{A}$ устойчив вверх, то есть каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для* *любой системы $A+B \in \mathfrak{A}_0$, где B удовлетворяет естественным условиям и неравенству $\sup\limits_{t\geqslant 0}\big(|B(t,0)| + \int_{-r}^{0} |B(t,s)|ds\big) \leqslant \delta$, имеет место неравенство*

$$\mathfrak{B}_0(A+B) \leqslant \mathfrak{B}_0(A) + \varepsilon. \tag{8}$$

Если на пространстве $\mathfrak{A}$ всех систем вида (1) определить метрику ρ равенством

$$\rho(A,B) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(|A(t,0)-B(t,0)| + \operatorname*{var}_{s\in[-r,0]} |A(t,s)-B(t,s)|\Big), \tag{9}$$

то утверждения аналогичные выше сформулированным, останутся справедливыми без условия «продолжаемости влево», то есть на всем пространстве $\mathfrak{A}$. Приведем эти утверждения.

Лемма 2. *Показатель Боля $\mathfrak{B}_0(A)$ системы $A \in \mathfrak{A}$ устойчив вверх, то есть каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любого возмущения $B(t,s)$, удовлетворяющего естественным условиям и неравенству $\sup\limits_{t\geqslant 0} \operatorname*{var}\limits_{s\in[-r,0]} |B(t,s)| \leqslant \delta$, имеет место неравенство* (8).

Теорема 3. *В пространстве $\mathfrak{A}$ с метрикой ρ, определенной равенством* (9), *свойство C-равномерной экспоненциальной устойчивости, является грубым свойством.*

В четвертом параграфе введено понятие $\mathbb{L}_2$-показателя Ляпунова решения системы (1) и сформулировано основное утверждение диссертации.

Пусть $t_0 = 0$. Для $x_t(u) \doteq x_t(\cdot,0,u)$ определим $\mathbb{L}_2$-показатель Ляпунова

$$\varkappa(u) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln\|x_t(u)\|_2}{t}, \quad \varkappa(0) \doteq -\infty.$$

Тогда множество $\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \varkappa(u) = -\infty\}$ образует линейное подпространство в $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}^+$ — прямое дополнение подпространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$, то есть $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \oplus \mathfrak{S}^-$. Тогда для всех ненулевых функций $u \in \mathfrak{S}^+$ выполнено неравенство $\varkappa(u) > -\infty$.

Пусть $u^1(\cdot), \dots, u^p(\cdot)$ — фиксированный набор p линейно независимых функций из $\mathfrak{S}^+$. Линейное подпространство в $\mathfrak{S}^+$, порожденное этим набором, обозначим $\mathbb{S}_0^p$ и всякой начальной функции $u \in \mathbb{S}_0^p$ поставим в соответствие движение $t \to x_t(u)$, отвечающее решению задачи (2), (3) при $t_0 = 0$. Таким образом, построено движение $t \to x_t(\mathbb{S}_0^p) \doteq \mathbb{S}_t^p$ пространства $\mathbb{S}_0^p$. Мы будем говорить, что это движение порождено **сужением** системы A на подпространство $\mathbb{S}_0^p$. Такое сужение обозначим $(A, \mathbb{S}_0^p)$.

Наряду с системой $(A, \mathbb{S}_0^p)$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geqslant 0, \quad y \in \mathbb{R}^p \tag{10}$$

с непрерывной на полуоси $\mathbb{R}_+$ матричной функцией $t \to B(t)$. Будем далее отождествлять систему (10) с задающей ее матрицей B и называть системой B. По аналогии с подпространством $\mathbb{S}_t^p$, введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{R}_t^p$ размерности p с базисом $y^1(t), \dots, y^p(t)$, образующем столбцы матрицы Коши $Y(t, \tau)$ системы B при $\tau = 0$.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ — пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{S}_t^p$ в $\mathbb{R}_t^p$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p}$.

Функцию $t \to L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ будем называть **обобщенным ляпуновским преобразованием** систем $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B, если: 1) функция $t \to L(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$; 2) при $t \geqslant 0$ оператор $L(t)$ является гомеоморфизмом пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$ и 3) выполнено неравенство $\sup\limits_{t \geqslant 0} \big(\|L(t)\|_{\mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \to \mathbb{L}_2}\big) < \infty$. Будем говорить также, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ **приводима** обобщенным ляпуновским преобразованием L к системе B, или что системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B **асимптотически подобны**.

В диссертации показано, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ имеет не более p различных $\mathbb{L}_2$-показателей Ляпунова $\lambda_1(A), \dots, \lambda_p(A)$ и что асимптотически подобные системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B сохраняют показатели Ляпунова: для всякого показателя $\lambda_i(A)$ системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ найдется такое решение $y_i(t)$ системы B, что $\lambda_i(A) = \overline{\lim\limits_{t \to \infty}} \dfrac{\ln |y_i(t)|}{t}$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^p$. Верно и обратное утверждение.

Основным утверждением диссертации является следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *сужение системы* A *на подпространство* $\mathbb{S}_0^p$ *и* $\mathbb{S}_0^p \subset \mathfrak{S}^+$. *Тогда:*

а) *найдутся система* B *с непрерывной* $(p \times p)$*-матрицей* $B(t)$ *и обобщенное ляпуновское преобразование* L, *приводящее систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B;

б) *в множестве* $\{B\}$ *всех систем, асимптотически подобных системе* $(A, \mathbb{S}_0^p)$, *найдется система с непрерывной на* $\mathbb{R}_+$, *верхней треугольной матрицей* $B(t)$;

в) *если, в дополнение к сказанному, всякое решение системы* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *«продолжаемо влево», то есть найдется константа* $\alpha > 0$ *такая, что для каждого* $u \in \mathbb{S}_0^p$, *любого* $\tau \in [-r, 0]$ *и всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполнено неравенство* $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\|_2 \leqslant \alpha \|x_t(\cdot, u)\|_2$, *то в множестве* $\{B\}$ *всех систем, асимптотически подобных системе* $(A, \mathbb{S}_0^p)$, *найдется система* B *с ограниченной на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *матрицей* $B(t)$ (*и следовательно, с огрниченной на* $\mathbb{R}_+$ *верхней треугольной матрицей* $B(t)$);

г) *если* $A(t+T, s) = A(t, s)$ *для всех* $(t, s) \in \mathbb{R} \times [-r, 0]$, *то найдутся система* B *с вещественнозначной непрерывной* T*-периодической матрицей* $B(t)$ *и* T*-периодическое по* t *обобщенное ляпуновское преобразование* L, *приводящее систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B.

д) *в множестве обобщенных ляпуновских преобразований, приводящих систему* $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *к системе* B *с непрерывной на* $\mathbb{R}_+$, *верхней треугольной матрицей* $B(t)$, *найдется ортогональное* ($L^*(t)L(t) = I_p$) *обобщенное ляпуновское преобразование.*

В диссертации описан алгоритм построения обобщенного ляпуновского преобразования, приводящего сужение $(A, \mathbb{S}_0^p)$ системы A к системе B с треугольной матрицей B. Из этого алгоритма следует, что увеличение размерности треугольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на единицу за счет пополнения пространства началных условий не влечет за собой больших вычислительных затрат, так как при этом «новая» система содержит «старую» в качестве подсистемы.

Отметим, что без дополнительных условий не удается доказать ограниченность матрицы $B(t)$ системы B, асимптотически подобной системе $(A, \mathbb{S}_0^p)$ (весьма важное условие при исследовании асимптотического поведения решений системы B). Однако, матрица $B(t)$ будет ограниченной, если выполнено, так называемое, условие продолжаемости влево (см. утверждение в) теоремы 4). Условие продолжаемости влево трудно проверяемо, но например, для периодических систем это условие и не требуется (см. утверждение г)).

Вероятно, этот факт имеет место и для более широкого класса систем, а именно для систем с рекуррентной по t матрицей A. В диссертации не доказан факт продолжаемости влево решений рекуррентных систем, но показано, что при некотором дополнительном условии, более слабом, чем условие продолжаемости влево, утверждение об ограниченности матрицы $B(t)$ остается верным и для случая рекуррентных систем.

В пятом параграфе приводится доказательство теоремы 4.

В шестом параграфе выделен некоторый класс систем вида (1), имеющих бесконечномерное пространство решений, но подпространство решений $\mathfrak{S}^+$ которых конечномерно и подсчитана размерность подпространства $\mathfrak{S}^+$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t) + \displaystyle\int_{-r}^{0} dC(t,s)y_t(s), \\ \dot{y}(t) = D(t)y(t). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, функции $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n,m)$, $D : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(m)$ непрерывны и ограничены на прямой $\mathbb{R}$, а функция $C : \mathbb{R} \times [-r, 0] \to \mathbb{M}(n,m)$ удовлетворяет естественным условиям.

Т е о р е м а 5. *Для любой системы вида* (11) *размерность пространства* $\mathfrak{S}^+$ *равна* $n+m$.

Далее получен ряд следствий теоремы 5, касающихся асимптотического поведения решений системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + \gamma(t)y(t) + \displaystyle\int_{-1}^{0} y_t(s)dg(t,s), \\ \dot{y}(t) = \beta(t)y(t). \end{cases}$$

Здесь $x(t)$, $y(t) \in \mathbb{R}$, скалярные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$, а функция $g : \mathbb{R} \times [-r, 0] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет естественным условиям.

В седьмом параграфе введено определение рекуррентрой системы с последействием и исследуютя некоторые свойства рекурентных систем.

Функцию $(t,s) \to A(t,s)$ (или, что эквивалентно, систему $A \in \mathfrak{A}$), удовлетворяющую естественным условиям, будем называть рекуррентной (по переменной t), если для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ множество

$$\varTheta_A(\varepsilon,T) \doteq \{\vartheta \in \mathbb{R} : \max_{|t|\leqslant T}\Big(|A(t+\vartheta,0) - A(t,0)| + \\ + \int_{-r}^{0} |A(t+\vartheta,s) - A(t,s)|\,ds\Big) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$ (то есть найдется такая константа $l > 0$, что $[t,t+l] \bigcap \varTheta_A(\varepsilon,T) \neq \varnothing$ для всех $t \in \mathbb{R}$).

В восьмом параграфе получен аналог теоремы В. М. Миллионщикова[11)] для линейных систем уравнений с последействием.

При каждом фиксированном $s \in [-r,0]$ сдвиг функции $t \to A(t,s)$ на константу τ обозначим $A_\tau(t,s) \doteq A(t+\tau,s)$. Пусть далее, $\mathcal{R}(A)$ — замыкание множества $\{A_\tau(t,s) : \tau \in \mathbb{R}\}$ сдвигов функции A в локально открытой топологии. Это означает, что $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ в том и только в том случае, если для некоторой последовательности $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ и любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такой номер i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\max_{|t|\leqslant T}\Big(|A_{\tau_i}(t,0) - \widehat{A}(t,0)| + \int_{-r}^{0} |A_{\tau_i}(t,s) - \widehat{A}(t,s)|\,ds\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Зафиксируем подпространство $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$ и для каждой $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ полный набор $\mathbb{L}_2$-показатель Ляпунова системы $(\widehat{A}, \mathbb{S}_0^p)$ обозначим $\lambda_1(\widehat{A}), \ldots, \lambda_p(\widehat{A})$. Будем считать, что $\lambda_1(\widehat{A}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p(\widehat{A})$.

Формулируемую ниже теорему можно рассматривать, как частичное распространение теоремы В. М. Миллионщикова на линейные системы уравнений с последействием.

Т е о р е м а 6. *Пусть $\mathbb{S}_0^p \subseteq \mathfrak{S}^+$, система $A \in \mathfrak{A}$ рекуррентна и для всех $\widehat{A} \in \mathcal{R}(A)$ и некоторой константы $\varkappa > -\infty$ выполнено*

11) *Миллионщиков В. М.* О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами. // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2127–2134.

неравенство $\lambda_1(\widehat{A}) \geqslant \varkappa$. Тогда найдутся система B с непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ верхней треугольной матрицей $B(t)$ и обобщенное ляпуновское преобразование L, приводящее сужение $(A, \mathbb{S}_0^p)$ системы A на подпространство $\mathbb{S}_0^p$ к системе B.

Публикации по теме диссертации

1. *Быкова Т. С., Тонков Е. Л.* О ляпуновской приводимости системы с последействием // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 2(25). С. 27–30.

2. *Быкова Т. С., Тонков Е. Л.* Ляпуновская приводимость линейной системы с последействием // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 731–737.

3. *Быкова Т. С.* Ляпуновская приводимость системы с последействием // Вестник Тамбовского университета. Тамбов, 2003. Т. 8, вып. 3. С. 355–356.

4. *Быкова Т. С., Тонков Е. Л.* Распространение теоремы Перрона–Миллионщикова о триангуляции на линейные системы с последействием // Вестник Удмуртского университета. Серия Математика. Ижевск, 2004. № 1. С. 51–66.

5. *Быкова Т. С.* О ляпуновской приводимости систем с последействием // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XV». Воронеж, 2004. С. 41–42.

6. *Быкова Т. С., Тонков Е. Л.* Приводимость линейной системы с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 1. С. 53–64.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать . .2005. Формат 60x84/16.
Тираж 100 экз. Заказ №
Типография ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет».
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.