На правах рукописи

СКОМОРОХОВ Виктор Викторович

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск 2003

Работа выполнена на кафедрах высшей математики Тамбовского государственного технического университета, алгебры и геометрии Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор ***А.И. Булгаков***
	кандидат технических наук, профессор ***Н.П. Пучков***
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ***В.Я. Дерр***
	доктор физико-математических наук, профессор ***Н.П. Осмоловский***
Ведущая организация	Институт математики и механики УрО РАН

Защита состоится "____" _______________ 2003 г. в "____" часов на заседании специализированного совета К 212.275.04 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Удмуртском государственном университете по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корпус 4, ауд. _____.

Отзывы в двух экземплярах, скрепленные гербовой печатью, просим направлять по адресу. 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корпус 4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Удмурского государственного университета.

Автореферат разослан "____" _______________ 2003 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент **Н.Н. Петров**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучению дифференциальных включений посвящены работы многих известных российских и зарубежных математиков. Это связано с тем, что дифференциальные включения являются удобным аппаратом описания многих задач теории управления, теории игр и т. д. Они возникают в ряде задач электродинамики, математической экономики, биологии и т. д. Отметим, что переход от задачи управления к задаче для дифференциального включения связано с теми или иными погрешностями. Они возникают, прежде всего, в связи с тем, что сама математическая модель управления описывает процесс с некоторыми допущениями и предположениями. Кроме того, построение самого многозначного отображения $F: [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающего дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \subset F(t, x(t)), \quad t \in [a,b] \tag{1}$$

и описывающего модель управления, связано с той или иной степенью точности. Поэтому аппроксимация дифференциального включения является актуальной задачей.

Для выпуклозначного отображения $F(\cdot,\cdot)$ А.Ф. Филипповым* введено понятие приближенного решения (δ-решения) дифференциального включения. Это определение имеет важное значение для изучения дифференциальных включений с выпуклозначной и полунепрерывной сверху правой частью, поскольку пределы сходящихся последовательностей приближенных решений являются решениями.

В то же время для практических задач представляет интерес исследование аппроксимации дифференциального включения не обладающего свойством выпуклости правой части. Этому вопросу посвящена диссертация. Отметим, что в этом случае аппроксимация дифференциального включения с невыпуклой правой частью может быть неустойчивой операцией.

Для исследования аппроксимаций дифференциальных включений, не обладающих свойством выпуклости значений правой части, в настоящей работе рассматривается несколько другое определение понятия приближенного решения, чем решение, предложенное А.Ф. Фи-

*Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

липповым. Отличие от сформулированного здесь и приближенного решения по А.Ф. Филиппову заключается в том, что значения многозначных отображений, определяющие "приближенные дифференциальные включения", не "овыпукляются". Как оказалось, такое определение приближенного решения полезно для исследования аппроксимаций дифференциальных включений с невыпуклой правой частью. Как показано в диссертации, свойства множеств таких приближенных решений дифференциального включения (1) тесно связаны со свойствами решений "овыпукленного" дифференциального включения:

$$\dot{x}(t) \in \operatorname{co} F(t, x(t)), \quad t \in [a, b]. \tag{2}$$

В работах А.Ф. Филиппова, В.И. Благодатских, G. Pianigiani, П.И. Чугунова, А.А. Толстоногова показано, что если отображение $F(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу или расстояния по Хаусдорфу между значениями многозначного отображения $F(\cdot, \cdot)$ оцениваются функцией Камке, то замыкание в пространстве непрерывных функций множества решений задачи Коши для дифференциального включения (1) совпадает со множеством решений этой задачи для включения (2). В общем случае такого равенства может и не быть. Подтверждением этому служит пример А. Плиса (A. Plis)*. Данная работа посвящена исследованию структуры множества решений "овыпукленного" включения в общем случае. В ней показана связь между множествами решений дифференциальных включений аппроксимирующих дифференциальное включение (1) с различного рода "возмущенниями" и "овыпукленного" дифференциального включения (2).

Этот результат является основой для изучения проблемы устойчивости аппроксимации дифференциального включения (не обладающего свойством выпуклости правой части) к различного рода возмущениям. При этом устойчивость множеств решений понимается в естественном смысле, т. е. "небольшие" изменения как самого заранее заданного множества, которому принадлежат решения дифференциального включения, так и правой части включения должны "мало" изменять множество решений. Такие задачи представля-

---

*Plis A. Trajectories and quasitrajectories of an orientor field // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys. 1963. V. 11. № 6. P. 369–370.

ют особый интерес, поскольку даже незначительные погрешности, вызванные вычислениями значений правой части включения (1), могут существенно изменить множество решений дифференциального включения, определенного даже на конечном отрезке. В предложенной работе найдены необходимое и достаточное условия того, что аппроксимация дифференциального включения является устойчивой относительно различного рода возмущений. Этим условием является плотность множества решений дифференциального включения (1) с невыпуклой правой частью во множестве решений "овыпукленного" включения (2) (это свойство в диссертации названо принципом плотности).

Полученные в диссертации результаты представляют собой продолжение результатов работ А.И. Булгакова, Л.И. Ткача, А.А. Ефремова, Е.А. Панасенко, H. Hermes, а также дополняют результаты работ А.Е. Ирисова, Е.Л. Тонкова, А.Ф. Филиппова, A. Bressan, G. Colombo, G. Pianigiani и др.

Цель работы. Целью работы является изучение свойств множеств решений "возмущенных" аппроксимирующих дифференциальных включений (множеств приближенных решений включения (1)), а также вопросов устойчивости аппроксимации дифференциального включения (1) относительно различного рода возмущений.

Общая методика исследования. Поставленные в диссертации вопросы исследуются с применением методов функционального анализа, теории функций вещественной переменной, дифференциальных уравнений и включений, теории многозначных отображений.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. В работе доказаны теоремы о представлении множеств решений "овыпукленного" дифференциального включения (2) и множеств решений дифференциальных включений аппроксимирующих дифференциальное включение (1) с внешними, внутренними и внешними возмущениями. Таким образом, расширяется представление множеств решений "овыпукленного" дифференциального включения. Получено необходимое и достаточное условие устойчивости аппроксимации дифференциального включения к различного рода возмущениям. Полученные результаты применены затем к изучению свойств периодических и многоточечных краевых задач.

Апробация диссертации. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (грант № Е02-1.0-212) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 01-01-00140).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на: научных конференциях "Державинские чтения – VII, VIII" (Тамбов, 2002, 2003), Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения – XII, XIII" (Воронеж, 2001, 2002), Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2001, 2003), 11-й Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2002), Всероссийской конференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и ее приложения" (Рязань, 2001), Втором Международном конгрессе "Нелинейный динамический анализ" (Москва, 2002), Тамбовском городском семинаре по функционально-дифференциальным уравнениям и включениям под руководством профессора А.И. Булгакова (1999–2002), научной конференции "Общие проблемы управления и их приложения к математической экономике" (Тамбов, 2000), Международной конференции "Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики", посвященной 100-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова (Тамбов, 2003), Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством профессора Е.Л. Тонкова (2003).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в тринадцати публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация объемом 112 страниц состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, и библиографического списка, состоящего из 111 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В автореферате используются следующие обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых, ограниченных, замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $B[u,r]$ – замкнутый шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке u и радиусом r. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\overline{V}$ замыкание множества V, $\operatorname{co} V$ выпуклую оболочку множества V; $V^\varepsilon \equiv \overline{\bigcup_{u\in V} B[u,\varepsilon]}$ ($\varepsilon \geqslant 0$).

Пусть $h[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ – хаусдорфово расстояние между множествами, содержащимися в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим $C^n[a,b]$ – пространство непрерывных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$; $D^n[a,b]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_D = |x(a)| + \int_a^b |\dot{x}(s)|ds$; $L^n[a,b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_L = \int_a^b |x(s)|ds$.

Обозначим через $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих следующими свойствами:

а) при каждых $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ функция $\eta(\,\cdot\,,x,\delta)$ измерима;

б) при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\delta \in [0,\infty)$ функция $\eta(t,\,\cdot\,,\delta)$ непрерывна;

в) для каждых $U \in \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $m_{U,\delta}\colon [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in U$ и $\tau \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,\tau) \leqslant m_{U,\delta}(t)$;

г) при почти всех $t \in [a,b]$ и каждого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim_{\substack{z\to x\\ \delta\to 0+0}} \eta(t,z,\delta) = \eta(t,x,0) = 0$.

Если для каждого $U \in \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0,\infty)$ найдется такая функция $m_{U,\delta}(\,\cdot\,)$, определяющая множество $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, что она представляет собой константу, то множество таких функций $\eta(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ обозначим через $\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times{}$ ${}\times[0,\infty))$.

Обозначим через $P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих свойствами из класса функций $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, а также удовлетворяющих следующим условиям: для каждых $U \in \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in (0,\infty)$ найдутся такие числа $r(U,\delta) > 0$ и $\beta(U,\delta) \geqslant 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in U$ число $r(U,\delta)$ удовлетворяет неравенству $r(U,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta)$, а для числа $\beta(U,\delta)$ при почти всех $t \in [a,b]$, всех $x \in U$ и $\tau \in [0,\delta]$ имеет место оценка $\eta(t,x,\tau) \leqslant \beta(U,\delta)$.

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится методика исследования и дан краткий обзор основных результатов диссертации.

Первая глава посвящена изучению аппроксимации дифференциального включения с внешними возмущениями.

В данной главе вводятся основные определения и вспомогательные утверждения, используемые в диссертации, а именно понятие аппроксимации и модуля непрерывности многозначного отображения.

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ аппроксимирует отображение $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot\,,\cdot\,,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ выполняется оценка

$$h[F(t,x),\widetilde{F}(t,x,\delta)] \leqslant \xi(t,x,\delta). \qquad (3)$$

Отображение $\widetilde{F}(\cdot\,,\cdot\,,\cdot)$ будем называть аппроксимирующим отображение $F(\cdot\,,\cdot)$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi(\cdot\,,\cdot\,,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ в неравенстве (3) определяет степень близости значения $\widetilde{F}(t,x,\delta)$ в точке $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ к значению $F(t,x)$ для каждого фиксированного $\delta \in [0,\infty)$. Эту функцию $\xi(\cdot\,,\cdot\,,\cdot)$ будем называть степенью аппроксимации отображения $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ отображением $\widetilde{F}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ или просто степенью аппроксимации. Будем считать, что $\widetilde{F}(\cdot\,,\cdot\,,\cdot)$ определяет способ или метод аппроксимации отображения $F(\cdot\,,\cdot)$. Пару $(\widetilde{F}(\cdot\,,\cdot\,,\cdot),\xi(\cdot\,,\cdot\,,\cdot))$ будем называть аппроксимацией отображения $F(\cdot\,,\cdot)$, а если при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ выполняется включение $F(t,x) \subset \widetilde{F}(t,x,\delta)$, то аппроксимацией вложением.

Пусть $\psi(\cdot\,,\cdot\,,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Определим функцию $\varphi(\psi)\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ равенством

$$\varphi(\psi)(t,x,\delta) = \sup_{y \in B[x,\psi(t,x,\delta)]} h[F(t,x),F(t,y)]. \qquad (4)$$

Значения функции $\varphi(\psi)(\cdot\,,\cdot\,,\cdot)$ в точке (t,x,δ) будем называть модулем непрерывности отображения $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ в точке (t,x) по переменной x в шаре $B[x,\psi(t,x,\delta)]$, функцию $\psi(\cdot\,,\cdot\,,\cdot)$ –

функцией радиуса модуля непрерывности или просто радиусом непрерывности, а саму функцию $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ – функцией модуля непрерывности или просто модулем непрерывности отображения $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ относительно радиуса непрерывности $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Лемма 1.0.3. * *Пусть* $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. *Тогда функция* $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$, *определенная равенством* (4), *принадлежит множеству* $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$.

В первом параграфе первой главы рассматривается для каждого $\delta\in[0,\infty)$ дифференциальное включение, аппроксимирующее дифференциальное включение (1) с внешними возмущениями,

$$\dot{x}(t)\in Q_\eta(t,x(t),\delta),\quad t\in[a,b], \tag{5}$$

где отображение $Q_\eta\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ задано равенством

$$Q_\eta(t,x,\delta)=\widetilde{F}(t,x,\delta)^{\eta(t,x,\delta)}, \tag{6}$$

а функция $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ задает соответственно радиус внешних возмущений аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$. В данном параграфе изложены основные теоремы о представлении множеств решений дифференциального включения (5). Показана связь между множествами решений дифференциальных включений (2) и (5). Под решением включения (1), (2), (5) понимается абсолютно непрерывная функция $x\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ при почти всех $t\in[a,b]$ удовлетворяющая включению (1), (2), (5), соответственно. Каждое решение дифференциального включения (5) будем называть (по аналогии с А.Ф. Филипповым) δ-решением дифференциального включения (1).

Пусть $V\subset C^n[a,b]$. Обозначим через $H(V)$, $H_{\mathrm{co}}(V)$ множества решений дифференциальных включений (1) и (2), соответственно, принадлежащих множеству V, а через $H_{\eta(\delta)}(V)$ – множество всех δ-решений дифференциального включения (1), принадлежащих множеству V.

*Нумерация теорем и лемм в автореферате совпадает с нумерацией теорем и лемм в диссертации.

Следует отметить, что поскольку отображение $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\to$ $\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то согласно работам А.Ф. Филиппова, H.A. Antosiewicz, A. Cellina, множество решений дифференциального включения (1) непусто.

Отметим также, что здесь исследование проводится на основе свойств квазирешений дифференциальных включений. Понятие квазирешения (квазитраектории) дифференциального включения впервые было введено Важевским (T. Wazewski).

Определение. Абсолютно непрерывная функция $x\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ является *квазирешением включения* (1), если найдется такая последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n, i=$ $=1,2\ldots$, обладающая свойством: $x_i(\cdot)\to x(\cdot)$ в $C^n[a,b]$ при $i\to\infty$; для любого $i=1,2\ldots$ и при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется включение

$$\dot{x}_i(t)\in F(t,x(t)).$$

Для любого множества $V\subset C^n[a,b]$ через $U(V)\subset\mathbb{R}^n$ обозначим множество

$$U(V)=\{x\in\mathbb{R}^n:\exists\, y(\cdot)\in V,\ t\in[a,b]\ x=y(t)\}.$$

Теорема 1.1.1. *Пусть $V\subset C^n[a,b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)\in P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times$ $\times[0,\infty))$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times$ $\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon>0$, что при почти всех $t\in[a,b]$, всех $x\in(U(V))^\varepsilon$ и $\delta\in[0,\infty)$ имеет место неравенство*

$$\xi(t,x,\delta)+\varphi(\psi)(t,x,\delta)\leqslant\eta(t,x,\delta),\tag{7}$$

где $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ – модуль непрерывности, а $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ – степень аппроксимации отображения $F(\cdot,\cdot)$, выполняется соотношение

$$H_{\mathrm{co}}(V)=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)},\tag{8}$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a,b]$ множества $H_{\eta(\delta)}(V^\delta)$, V^δ – замкнутая в пространстве $C^n[a,b]$ δ-окрестность множества V.

Если пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ вложением, теорему 1.1.1 можно уточнить.

Теорема 1.1.2. *Пусть V — ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)\in P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$ вложением. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in$ $\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon>0$, что при почти всех $t\in[a,b]$, всех $x\in(U(V))^\varepsilon$ и $\delta\in[0,\infty)$ выполняется оценка*

$$\varphi(\psi)(t,x,\delta)\leqslant\eta(t,x,\delta),$$

справедливо равенство (8).

Полученные результаты используются в параграфе 1.2 для исследования аппроксимации периодических и многоточечных краевых задач.

Отметим, что не всегда множество решений дифференциального включения (1) плотно во множестве решений включения (2). Утверждение теоремы 1.1.1 вместе с примером Плиса (A. Plis) устанавливают, что, если правая часть дифференциального включения (1) не обладает свойством выпуклости, аппроксимация дифференциального включения (1), вообще говоря, может и не быть устойчивой, т. е. "небольшие" изменения правой части включения (1) могут существенно изменить множество решений включения (1). Кроме того, левую часть оценки (7) при заданном радиусе непрерывности $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)\in P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ и произвольной степени аппроксимации $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ можно рассматривать как оценку "грубости измерений" аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$, за границей которой нарушается устойчивость множества решений дифференциального включения (1), если замыкание множества решений включения (1) не совпадает с множеством решений включения (2).

Таким образом, сведения изложенные в главе 1, являются основой для изучения вопроса устойчивости аппроксимации дифференциальных включений к внешним возмущениям. Этому вопросу посвящена глава 2. В параграфе 2.1 вводятся понятия устойчивости аппроксимации дифференциального включения относительно внешних возмущений и принципа плотности дифференциального включения, а также формулируются необходимые и достаточные условия устойчивости аппроксимации дифференциального включения относительно внешних возмущений из различных классов функций.

Для каждой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ многозначное отображение $Q_\eta\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определяющее включение (5), задано равенством (6) и при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ обладает свойством

$$\lim_{\delta \to 0+0} h[Q_\eta(t,x,\delta), F(t,x)] = 0, \tag{9}$$

т. е., все отображения $Q_\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$, определенные равенством (6) и зависящие от функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и параметра $\delta \in [0,\infty)$, "близки" (в смысле равенства (9)) к отображению $F(\cdot, \cdot)$, порождающему включение (1). Поэтому естественно возникает вопрос: при каких условиях справедливо равенство

$$\overline{H(V)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)} \tag{10}$$

для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$?

Будем говорить, что аппроксимация дифференциального включения (1) устойчива на ограниченном замкнутом множестве $V \subset C^n[a,b]$ относительно внешних возмущений из класса $K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, если для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ выполняется равенство (10).

Будем говорить, что для дифференциального включения (1) на множестве $V \subset C^n[a,b]$ выполняется принцип плотности, если справедливо равенство

$$\overline{H(V)} = H_{\mathrm{co}}(V). \tag{11}$$

Теорема 2.1.1. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$. Тогда для того, чтобы для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \overline{U(V)} \times [0,\infty)$, удовлетворяющей соотношению $\xi(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta)$, аппроксимация дифференциального включения (1) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы для включения (1) на множестве V выполнялся принцип плотности.*

Если пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ вложением, теорему 2.1.1 можно уточнить.

Теорема 2.1.2. *Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$ вложением. Тогда для того, чтобы для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ аппроксимация дифференциального включения была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для включения* (1) *на множестве V выполнялся принцип плотности.*

Таким образом, из теорем 2.1.1 и 2.1.2 следует, что аппроксимация дифференциального включения (1) устойчива на ограниченном замкнутом множестве из $C^n[a,b]$ относительно внешних возмущений из класса $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ только в том случае, когда отображение $F(\cdot,\cdot)$ либо имеет выпуклые образы, либо, когда для включения (1) на этом множестве выполняется принцип плотности (равенство (11)). Последнее, как подтверждает пример Плиса (A. Plis), для дифференциальных включений выполняется далеко не всегда.

В параграфе 2.2 рассмотрены вопросы устойчивости аппроксимации периодических и многоточечных краевых задач.

Глава 3 посвящена изучению аппроксимации дифференциального включения с внутренними и внешними возмущениями.

Рассмотрим для каждого $\delta\in[0,\infty)$ дифференциальные включения

$$\dot{x}(t)\in Q_{\eta_0\eta}(t,x(t),\delta),\quad t\in[a,b], \tag{12}$$

где отображение $Q_{\eta_0\eta}\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ определено равенствами

$$\widetilde{F}_0(t,x,\delta)=\overline{\widetilde{F}(t,B[x,\eta_0(t,x,\delta)],\delta)},$$
$$Q_{\eta_0\eta}(t,x,\delta)=(\widetilde{F}_0(t,x,\delta))^{\eta(t,x,\delta)}.$$

Будем считать, что функции $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)\in\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times\times[0,\infty))$, $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ задают соответственно радиус внутренних и внешних возмущений аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$.

В параграфе 3.0 сформулированы основные свойства многозначного отображения $\widetilde{F}_0\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Пусть

$\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \widetilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. По функции $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, определим функцию $\xi(\eta_0) \colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ равенством

$$\xi(\eta_0)(t, x, \delta) = \sup_{z \in B[x, \eta_0(t, x, \delta)]} \xi(t, z, \delta). \tag{13}$$

В параграфе 3.1 изложены утверждения о представлении множеств решений аппроксимирующих дифференциальных включений с внутренними и внешними возмущениями.

Пусть $V \subset C^n[a, b]$. Через $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)$ обозначим множество решений дифференциального включения (12), с заданными радиусами внутренних и внешних возмущений, принадлежащих множеству V.

Теорема 3.1.1. *Пусть $V \subset C^n[a, b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$ и пусть $\psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \widetilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Далее, пусть $(\widetilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon > 0$, что при почти всех $t \in [a, b]$, всех $x \in (U(V))^\varepsilon$ и $\delta \in [0, \infty)$ имеет место неравенство*

$$\xi(\eta_0)(t, x, \delta) + \varphi(\eta_0)(t, x, \delta) + \varphi(\psi)(t, x, \delta) \leqslant \eta(t, x, \delta),$$

где функция $\xi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$ определена равенством (13), $\varphi(\cdot)(\cdot, \cdot, \cdot)$ – модуль непрерывности отображения $F(\cdot, \cdot)$ относительно радиусов непрерывности $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$, выполняется соотношение

$$H_{co}(V) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)},$$

где $\overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a, b]$ множества $H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)$, V^δ – замкнутая в пространстве $C^n[a, b]$ δ-окрестность множества V.

В параграфе 3.2 рассматриваются вопросы аппроксимации периодических и многоточечных краевых задач дифференциальных включений с внутренними и внешними возмущениями.

В параграфе 3.3 содержатся сведения о некоторых особенностях, свойственных аппроксимации дифференциальных включений с внутренними и внешними возмущениями. А именно, изучается дифференциальное включение для каждого фиксированного $\delta > 0$

$$\dot{x}(t) \in \Phi_{\eta_0\eta}(t, x(t), \delta), \quad t \in [a, b], \tag{14}$$

в котором отображение $\Phi_{\eta_0\eta}\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ определено равенствами

$$\Phi(t, x, \delta) = \overline{\operatorname{ext}}\,(\operatorname{co}\widetilde{F}(t, x, \delta)),$$
$$\Phi_{\eta_0\eta}(t, x, \delta) = (\Phi(t, B[x, \eta_0(t, x, \delta)], \delta))^{\eta(t,x,\delta)},$$

где $\overline{\operatorname{ext}}\,(\,\cdot\,)$ – замыкание множества крайних точек соответствующего множества.

Пусть $V \subset C^n[a, b]$. Обозначим через $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)$ – множество всех решений включения (14), принадлежащих множеству V при фиксированном $\delta > 0$.

Следует отметить, что имеют место включения $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V) \subset$ $\subset H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)$.

Скажем, что отображение $\widetilde{F}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если для любых $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ $\widetilde{F}(\,\cdot\,, x, \delta)$ измеримо и при почти всех $t \in [a, b]$, всех $\delta \in [0, \infty)$ $\widetilde{F}(t,\,\cdot\,, \delta)$ непрерывно.

Теорема 3.3.2. *Пусть V – замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, $\eta_0(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,), \xi(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ аппроксимирует отображение $F(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ вложением и $\widetilde{F}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда для любой функции $\eta(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ справедливы равенства*

$$H_{\mathrm{co}}(V) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)},$$

где $\overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a, b]$ множества $\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)$.

Сведения, изложенные в параграфе 3.3 используются в параграфе 3.4 для изучения структуры множеств решений периодических и многоточечных краевых задач дифференциальных включений с положительной оценкой снизу радиуса внутренних возмущений.

Глава 4 посвящена проблеме устойчивости аппроксимации дифференциальных включений к внутренним и внешним возмущениям. В параграфе 4.1 изложены понятия устойчивости и устойчивости по начальным условиям аппроксимации дифференциальных включений относительно внутренних и внешних возмущений из разных классов функций, аналогичные соответствующим понятиям, приведенным в главе 2. Доказан необходимый и достаточный признак устойчивости аппроксимации дифференциальных включений с внутренними и внешними возмущениями. Этим признаком, как и в случае аппроксимации дифференциальных включений с внешними возмущениями, является принцип плотности для включения (1) на заданном множестве.

В параграфе 4.2 рассматривается устойчивость аппроксимации дифференциального включения по крайним точкам аппроксимирующего многозначного отображения, т. е. условия, при которых для любых функций $\eta_0(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ и $\eta(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in K([a,b]\times \times\,\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ справедливо равенство

$$\overline{H(V)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}.$$

В последнем параграфе диссертации утверждения главы 3 и параграфов 4.1 и 4.2 применяются для изучения устойчивости аппроксимации периодических и многоточечных краевых задач относительно внутренних и внешних возмущений.

Автор выражает глубокую благодарность научным руководителям профессору А.И. Булгакову и профессору Н.П. Пучкову, а также всем членам кафедр алгебры и геометрии Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина и высшей математики Тамбовского государственного технического университета за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ИЗЛОЖЕНЫ В СЛЕДУЮЩИХ ПУБЛИКАЦИЯХ

1 *Булгаков А.И.* Аппроксимация дифференциальных включений / А.И. Булгаков, В.В. Скоморохов // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 35–52.

2 *Булгаков А.И.* Приближенные решения дифференциального включения с непрерывной правой частью / А.И. Булгаков, Н.П. Пучков, В.В. Скоморохов // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2002. Т. 7. Вып. 1. С. 104–105.

3 *Булгаков А.И.* К вопросу об аппроксимации дифференциальных включений / А.И. Булгаков, А.А. Ефремов, В.В. Скоморохов // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2001. Т. 6. Вып. 2. С. 131–139.

4 *Булгаков А.И.* Дифференциальные включения с внешними возмущениями, радиус которых зависит от фазовой переменной / А.И. Булгаков, В.В. Скоморохов // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 429–430.

5 *Булгаков А.И.* Методы аппроксимаций дифференциальных включений и принцип плотности / А.И. Булгаков, В.В. Скоморохов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. / ВГУ. Воронеж, 2001. С. 60–61.

6 *Булгаков А.И.* Аппроксимация дифференциального включения по крайним точкам аппроксимирующего отображения / А.И. Булгаков, В.В. Скоморохов // Современные методы в теории краевых задач "Понтрягинские чтения – XII": Тез. докл. / ВГУ. Воронеж, 2001. С. 40–41.

7 *Булгаков А.И.* Аппроксимация дифференциального включения с внутренними и внешними возмущениями / А.И. Булгаков, Н.П. Пучков, В.В. Скоморохов // Современные методы в теории краевых задач "Понтрягинские чтения – XIII": Тез. докл. / ВГУ. Воронеж, 2002. С. 28–29.

8 *Булгаков А.И.* К вопросу об аппроксимации дифференциальных включений с периодической правой частью / А.И. Булгаков, Н.П. Пучков, В.В. Скоморохов // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 11-й Сарат. зимней шк. Саратов, 2002. С.33–34.

9 *Булгаков А.И.* Дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями, зависящими от фазовой переменной / А.И. Булгаков, В.В. Скоморохов // Известия РАЕН. Дифференц. уравнения / РГПУ. Рязань, 2001. № 5. С. 34–36.

10 *Булгаков А.И.* Некоторые вопросы теории возмущенных включений и принцип плотности в аппроксимации / А.И. Булгаков, Л.И. Ткач, В.В. Скоморохов // Второй международный конгресс "Нелинейный динамический анализ": Тез. докл. / МАИ. М., 2002. С 175–176.

11 *Скоморохов В.В.* Аппроксимация дифференциального включения с периодической правой частью по крайним точкам аппроксимирующего отображения / В.В. Скоморохов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конф. / ВГУ. Воронеж, 2003. С. 237–238.

12 *Скоморохов В.В.* Об устойчивости аппроксимации дифференциальных включений с периодической правой частью / В.В. Скоморохов // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2003. Т. 8. Вып. 1. С. 166–167.

13 *Скоморохов В.В.* О сходимости множества решений двухточечной краевой задачи, построенной по крайним точкам аппроксимирующего отображения. / В.В. Скоморохов // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2003. Т. 8. Вып. 3. С. 453–454.

Подписано к печати 20.06.2003.
Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 0,93 усл. печ. л.: 1,0 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С 423.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская 106, к. 14