УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.929 *На правах рукописи*

Баранов Виктор Николаевич

ЗАДАЧИ ВЫЖИВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск – 2003 г.

Работа выполнена в ГОУВПО «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
профессор Е. Л. Тонков

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Булгаков

доктор физико-математических наук,
профессор В. И. Сумин

Ведущая организация — Институт математики и механики УрО РАН

Защита состоится на заседании диссертационного совета К 212.275.04 при ГОУВПО «Удмуртский государственный университет» по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская 1 (корп. 4), Математический факультет. E-mail: *elt@udman.ru*, *imi@uni.udm.ru*

«28» января 2004 г. в 14^{00} в ауд. 222.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан «......» декабря 2003 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета к.ф.-м.н., доцент Н.Н. Петров

Актуальность темы. Задачи выживания (термин принадлежит Aubin J.-P.[1]) для управляемых динамических систем включают в себя большое число вполне конкретных приложений, интерес к которым не ослабевает с конца 50-х годов прошлого столетия. К числу таких прикладных задач относятся задачи об обходе препятствия, о построении управления, удерживающего траектории системы в заранее заданном множестве, в частности, на заданном многообразии, некоторые задачи математической экономики и многое другое.

Задача о существовании решения $x(t, x_0)$ обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ остающегося в наперед заданном множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ (такое решение называется выживающим), была решена в 1942 году Нагумо[2]. Оказывается, что необходимым и достаточным условием существования выживающего решения является включение $f(x) \in T_x M$ для всех $x \in \partial M$, где $T_x M$— конус Булигана к множеству M в точке x.

Теорема Нагумо допускает естественное обобщение на дифференциальные включения $\dot{x} \in F(x)$[3]: если функция $x \to F(x)$ полунепрерывна сверху и имеет выпуклые образы, то дифференциальное включение имеет выживающее решение в множестве M если и только если во всех $x \in \partial M$ имеет место неравенство $F(x) \cap T_x M \neq \varnothing$.

Близкими к вопросам выживаемости являются задачи управления с фазовыми ограничениями. Например, требуется среди всех траекторий управляемой системы, выходящих из данной точки, найти траекторию максимально долго остающуюся в заданном множестве. В некоторых задачах требуется минимизировать функционал качества, заданный на траекториях управляемой системы, при этом траектория не должна покидать некоторое заданное в фазовом пространстве множество.

Хорошо известно (см. статью В. И. Благодатских и А. Ф. Филиппова[4]), что управляемые системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U,$$

тесно связаны с дифференциальными включениями

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = f(t, x, U),$$

[1] *Aubin J.-P.* Viability theory. Boston: Birkhauser, 1991. 326 p.

[2] *Nagumo M.* Uber die Lage der Intergralkurven gewohnliker Differentialgleichungen // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1942. 24. P. 551–559.

[3] *Haddad G.* Monotone trajectories of differential inclusions and functional-differential inclusions with memory // Israel J. of Math. 1984. 31. P. 83–100.

[4] *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–251.

поэтому (и мы будем пользоваться этим в дальнейшем) имеет смысл изучать задачи выживания для дифференциальных включений.

В работах А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филипповой[5] получено аналитическое описание множества траекторий линейных дифференциальных включений, выживающих до определенного момента времени в пределах заданного множества. В другой работе А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филипповой[6] установлена связь между задачами о выживаемости для дифференциальных включеий и системами включений, содержащими возмущающие параметры и функции.

Задачу о выборе траектории дифференциального включения из множества всех траекторий, с заданным начальным условием, которая максимально долго находится в заданном множестве, (по аналогии с задачей о быстродействии, ее естественно называть задачей о "долгодействии") можно отнести к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями, необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина для которой даны в работе В. И. Благодатских[7]. Другой подход к решению задач на экстремум при наличии ограничений предложен А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным[8].

Задачу выживания в множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ можно интерпретировать, как задачу избежания столкновения с множеством $\mathbb{R}^n \backslash M$. Задачам об избежании столкновения посвящены статьи А. З. Фазылова[9] и Н. Сатимова с А. Азамовым[10].

Близкими к задачам выживания являются задачи о построении стабильных мостов в дифференциальных играх сближения-уклонения. Оказывается, что стабильные мосты можно строить в терминах конуса

---

[5] *Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф.* Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.

Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об оптимальном описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1303–1315.

[6] *Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф.* Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. матем. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 304–315.

[7] *Blagodatskih V. I.* Sufficient condition for optimality in problems with state constraints // Appl. Math. and Optim. 1981. V. 7. N 2. P. 149–157.

[8] *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, №. 3. С. 395–453.

[9] *Фазылов А. З.* Достаточные условия оптимальности для задачи выживания // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3 С. 535–537.

Фазылов А. З. К задаче избежания столкновений // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987 № 3. С. 30–36.

[10] *Сатимов Н., Азамов А.* К задаче избежания столкновений в нелинейных системах // Докл. АН УзССР. 1974. № 6. С. 3–5.

Булигана (см. работу В.Н. Ушакова[11]. В связи с задачами описания стабильных мостов в Екатеринбурге (в ИММ УрО РАН) под руководством А. Б. Куржанского, Т. Ф. Филипповой и В. Н. Ушакова активно развивается теория выживания для дифференциальных включений[12]. Важное внимание в этих работах уделяется построению ядра выживания и разработке численных алгоритмов, позволяющих строить ядро выживания для конкретных математических объектов.

Задачи выживания для систем с последействием (их еще называют системами с наследственностью) отличаются от задач выживания для обыкновенных дифференциальных уравнений в первую очередь тем, что естественное фазовое пространство $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ таких систем бесконечномерно. Эту интерпретацию систем с последействием предложил Н. Н. Красовский[13].

Отметим еще раз, что в математической экономике представляет интерес исследование условий, при которых конкретная экономическая система функционирует в заранее заданных ограничениях. Математическое описание таких моделей чаще всего приводит к соответствующим системам дифференциальных уравнений. Существенно при этом, что при внимательном моделировании экономических моделей мы вынуждены учитывать всегда присутствующий в экономике эффект запаздывания. Таким образом, экономические процессы часто моделируются с помощью уравнений с последействием. На важность этого обстоятельства обратили внимание участников ижевского семинара по теории управления В.П. Максимов и Д. Л. Андрианов[14]. В связи с этим

[11] *Ушаков В. Н* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика 4. 1980. С. 32-45.

[12] *Гусейнов Х. Г , Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления // Проблемы упр. и теории информации 1985 Т. 14, №. 3. С. 1–14.

Гусейнов Х. Г., Субботин А. И., Ушаков В. Н. Об инфинитизимальных конструкциях в теории обобщенных динамических систем. I // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, №. 2. С. 157–165.

Гусейнов Х. Г., Субботин А. И., Ушаков В. Н. Об инфинитизимальных конструкциях в теории обобщенных динамических систем. II // Дифференц. уравнения. 1998. Т 34, №. 4. С. 457–464.

Незнахин А. А., Ушаков В. Н. Построение ядра выживаемости с ограниченным блужданием для дифференциального включения // Деп. в ВИНИТИ 16.12.00 №. 3083-В00 24с.

Филиппова Т. Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений.: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Екатеринбург 1992. 266. с. /Ин-т математики и механики УрО РАН.

[13] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

[14] *Андрианов Д Л.* Целевое управление и краевые задачи для макроэкономических

для управляемой системы $\dot{x}(t) = f(t, x_t, u)$ и целевого множества

$$M \doteq \{\sigma \in C([-r,0],\mathbb{R}^n) : \beta(\sigma(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\sigma(s))ds \leqslant 0\}$$

в статье Е. Л. Тонкова[15] получены достаточные условия выживаемости.

Цель работы. Целью работы является исследование необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять система уравнений с последействием (или дифференциальное включение с последействием) и множество M, чтобы множество M обладало свойством выживаемости, а также исследование некоторых задач выживания со специальным множеством, представляющем интерес в приложениях.

Методика исследований. В работе предложен способ исследования систем уравнений с последействием (включений с последействием) основанный на переходе к некоторому специально построенному уравнению (включению) в банаховом пространстве. При исследовании задач выживания интенсивно используется выпуклый анализ, функциональный анализ, теория уравнений с последействием.

Научная новизна. Получены необходимые и достаточные условия выживания траекторий дифференциального включения (системы дифференциальных уравнений) с последействием в заданном множестве фазового пространства. Особое внимание уделено критическому случаю, допускающему скольжение траектории по границе множества. Эти результаты применены к исследованию конкретной задачи.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит в основном теоретический характер. Введено понятие вариации δx_t движения $t \to x_t \in \mathfrak{X}$ в некотором банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, причем эта вариация является элементом более широкого пространства $\mathfrak{Y}$. Рассмотрено уравнение $\delta x_t = F(x_t)$. Доказана эквивалентность дифференциального уравнения с последействием этому абстрактному уравнению при определенным способом выбранных пространствах $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и отображения $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Для уравнения $\delta x_t = F(x_t)$ исследованы необходимые и достаточные условия выживаемости решений этого уравнения в некотором заданном множестве $M \subset \mathfrak{X}$. Полученные результаты применены к дифференциальному уравнению с последействием. Также доказана эквивалентность дифференциального включения с последействием некоторому абстрактному включению. Получены необходимые и достаточные условия выживаемости для включений с последействием.

моделей с последействием. Автореф. докт. дисс Ижевск. 1994. 29 с.

[15] *Тонков Е. Л* Динамические задачи выживания // Вестник Пермского гос. тех. ун-та. Функцион -дифференц. уравнения (спец. вып.). 1997. № 4. С.138–148.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (Ижевск, 1999 — 2003 годы), на Международной конференции "Ломоносов — 2000"(Москва, МГУ), на XXXII-й региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики"(Екатеринбург, 2001), на 5-ой Российской университетско-академической конференции (Ижевск, ЕГНОК — 2001), на конференции "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения", посвященной 80-летию Н. В. Азбелева (Ижевск, 2002), семинаре В. А. Кондратьева, В. М. Миллионщикова и Н. Х. Розова по качественной теории дифференциальных уравнений (Москва, МГУ, 2003), на Международной конференции, посвященной 100-летию А. Н. Колмогорова (Тамбов, ОПУ-2003), на семинаре профессора В. И. Сумина по теории оптимального управления (Нижегородский государственный университет), на семинаре кафедры оптимального управления ВМК МГУ (научные руководители Н. Л Григоренко и М. С. Никольский), на семинаре профессора А. И. Булгакова (Тамбовский государственный университет).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 03–01–00014) и конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е02–1.0–100).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в девяти работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, девяти параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы. Объем диссертации 109 страниц. Библиографический список содержит 41 наименование.

Краткое содержание работы

Во введении описывается общая постановка задачи и излагается краткое содержание работы по параграфам.

В первом параграфе работы вводится понятие вариации δx_t движения $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in \mathbb{R}$ в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, причем эта вариация является элементом более широкого пространства $\mathfrak{Y}$.

Пусть заданы банаховы пространства $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$. Будем говорить, что отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, где $t \in [0, \alpha]$, $\alpha > 0$, имеет в точке t вариацию $\delta x_t \in \mathfrak{Y}$, если существует отображение $\varepsilon \to r(\varepsilon) \in \mathfrak{Y}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$x_{t+\varepsilon} = x_t + \varepsilon \delta x_t + r(\varepsilon),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\|r(\varepsilon)\|_{\mathfrak{Y}}}{\varepsilon}=0,\quad \sup_{\varepsilon>0}\left\|\delta x_t+\frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right\|_{\mathfrak{X}}<+\infty.$$

Это определение позволяет естественным образом ввести понятие касательного конуса $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ к множеству $M\subset\mathfrak{X}$ в точке x, элементы которого тоже лежат в более широком пространстве $\mathfrak{Y}$.

Пусть заданы банаховы пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$. Пусть далее, M – непустое подмножество пространства $\mathfrak{X}$ и $x\in M$. Элемент $h\in\mathfrak{Y}$ называется касательным направлением к множеству M в точке x, если существуют отображение $t\to r(t)\in\mathfrak{Y}$ и последовательность чисел $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^+$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$\lim_{i\to\infty}t_i=0,\quad x+th+r(t)\in M,$$

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{\|r(t_i)\|_{\mathfrak{Y}}}{t_i}=0,\quad \sup_i\left\|h+\frac{r(t_i)}{t_i}\right\|_{\mathfrak{X}}<+\infty.$$

Обозначим $T_x^{\mathfrak{Y}}M$— множество касательных направлений к M в x.

Доказаны необходимые для дальнейшего изложения утверждения, описывающие структуру конуса и дающие его связь с хорошо изученным конусом Булигана, который совпадает с $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ при $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}$.

Теорема 1. *Элемент $h\in\mathfrak{Y}$ принадлежит множеству $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{(\delta_i,h_i)\}$, где $\delta_i\in\mathbb{R}^+$, $h_i\in\mathfrak{X}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$x+\delta_i h_i\in M,\quad \delta_i\to 0,\quad \|h-h_i\|_{\mathfrak{Y}}\to 0,\quad \sup_i\|h_i\|_{\mathfrak{X}}<+\infty.$$

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$— банаховы пространства, $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$, $x\in M$, где $M\subset\mathfrak{X}$. Тогда для конуса $T_x^{\mathfrak{Y}}M$ имеет место включение*

$$\bigcup_{r>0}\overset{\mathfrak{Y}}{\mathrm{cl}}\left((T_xM)^{\mathfrak{X}}\cap B_{\mathfrak{X}}[0,r]\right)\subset T_x^{\mathfrak{Y}}M\subset (T_xM)^{\mathfrak{Y}}\bigcap\left(\bigcup_{r>0}\overset{\mathfrak{Y}}{\mathrm{cl}}(B_{\mathfrak{X}}[0,r])\right).$$

Здесь через $(T_xM)^{\mathfrak{X}}$ и $(T_xM)^{\mathfrak{Y}}$ обозначены конусы Булигана к множеству M в точке x в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно.

Во втором параграфе дается постановка задачи выживания. Введем следующие обозначения. Для произвольной непрерывной функции $t\to x(t)\in\mathbb{R}^n$, $t\in[-r,\alpha]$, где $r>0$, $\alpha>0$, обозначим x_t— отображение отрезка $[0,\alpha]$ в пространство непрерывных функций $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, действующее по правилу

$$x_t(s)\doteq x(t+s),\quad t\in[0,\alpha],\quad s\in[-r,0]. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с последействием

$$\dot{x} = f(x_t), \tag{2}$$

$$x_0 = \varphi. \tag{3}$$

Вместе с системой (2) будем рассматривать некоторое непустое подмножество $M \subset AC_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$, где $AC_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$— пространство абсолютно непрерывных функций с существенно ограниченной производной, норма в котором задана равенством

$$||\varphi|| = \max\{\max_{s\in[-r,0]}|\varphi(s)|, \operatorname*{vraisup}_{s\in[-r,0]}|\dot{\varphi}(s)|\}.$$

Пусть $\varphi \in M$. Будем говорить, что решение $x(t,\varphi)$ задачи Коши (2), (3) выживает в множестве M, если существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $t \in [0,\alpha]$ выполнено включение $x_t \in M$, где x_t движение в пространстве $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, порожденное по правилу (1).

Множество M обладает свойством выживаемости для системы (2), если для всякого $\varphi \in M$ найдется решение $x(t,\varphi)$ задачи Коши (2), (3), выживающее в M. Будем говорить также, что множество M есть *множество выживаемости системы* (2).

В данной работе исследуются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять система (2) и множество M, чтобы множество M обладало свойством выживаемости для системы (2).

В третьем параграфе изучены условия выживания уравнения

$$\delta x_t = F(x_t), \tag{4}$$

где F действует в произвольном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$.

Следующие теоремы дают нам необходимые и достаточные условия выживания уравнения (4).

Напомним, что множество $M \subset \mathfrak{X}$ называется локально компактным, если для всякой точки $x \in M$ найдется число $r > 0$ такое, что множество $B_{\mathfrak{X}}[x,r] \cap M$— компактно.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$— банаховы пространства, $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, и заданы локально компактное множество M в $\mathfrak{X}$ и непрерывное отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Пусть далее, для всех точек $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение $t \to x_t \in M$, $t \in [0,\alpha]$ такое, что $x_0 = \varphi$ и $\delta x_t = F(x_t)$ для почти всех $t \in [0,\alpha)$, то есть существует выживающее в M решение (4) с начальным условием $x_0 = \varphi$.*

Тогда для всех точек $x \in M$ имеет место включение

$$F(x) \in T_x^{\mathfrak{Y}} M.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, заданы локально компактное множество M в $\mathfrak{X}$ и непрерывное отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Пусть далее:*

1) *для каждого $x \in M$ имеет место включение $F(x) \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$;*

2) *найдется константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in M$ выполнено неравенство*

$$\sup_i \left\| F(x) + \frac{r(t_i(x), x)}{t_i(x)} \right\|_{\mathfrak{X}} < c,$$

где $r(t_i(x), x)$ и $t_i(x)$ из определения касательного конуса $T_x^{\mathfrak{Y}} M$.

Тогда для всякого $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение $t \to x_t \in M$, $t \in [0, \alpha]$ такое, что $x_0 = \varphi$ и $\delta x_t = F(x_t)$ для почти всех $t \in [0, \alpha)$.

Доказано, что в теореме 3 условие непрерывности отображения F можно заменить на более слабое: достаточно замкнутости F.

В четвертом параграфе указана связь между системой с последействием и уравнением (4). Оказывается, что если в качестве пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ взять $AC_0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ и $L_1([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$, а отображение $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ определить равенством

$$F(\sigma) \doteq (\dot{\sigma}, f(\sigma)), \tag{5}$$

то между решениями уравнений (4) и (2) существует взаимно однозначное соответствие.

Лемма 2. *Уравнение (4) эквивалентно уравнению (2) в том смысле, что если функция*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (2), то отображение

$$t \to x_t \in \mathfrak{X}, \quad t \in [0, \alpha),$$

построенное по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in [0, \alpha), \quad s \in [-r, 0],$$

имеет для почти всех $t \in [0,\alpha)$ *вариацию* δx_t *и является решением уравнения* (4).

И наоборот, если отображение

$$t \to y_t, \quad t \in [0,\alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (4), *то отображение*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r,\alpha)$$

где

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-r,0], \quad x(t) = y_t(0), \quad t \in [0,\alpha)$$

является решением уравнения (2).

Из теоремы 3 и этой леммы следует утверждение, дающее достаточные условия выживания для уравнений с последействием.

Т е о р е м а 4. *Рассмотрим некоторое локально компактное множество* $M \subset \mathfrak{X}$. *Для того, чтобы существовало движение* $t \to x_t \in M$, *порожденное решением дифференциального уравнения с последействием* $\dot{x}(t) = f(x_t)$ *и начальным условием* $x_0 = \varphi \in M$ *достаточно, чтобы для всякой точки* $\sigma \in M$ *выполнялось включение*

$$F(\sigma) \in T_\sigma^{\mathfrak{Y}} M,$$

где $F(\sigma)$ *определено равенством* (5).

Доказана замкнутость оператора дифференцирования.

Л е м м а 3. *Оператор дифференцирования*

$$(F_0\sigma)(t) \doteq \dot{\sigma}(t), \quad t \in [-r,0]$$

является замкнутым оператором, если его рассматривать как оператор, действующий из $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ *в* $L_1([-r,0],\mathbb{R}^n)$ *с областью определения* $D(F_0) \doteq AC_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Из этого утверждения следует, что в теореме 4 в качестве пространства $\mathfrak{X}$ можно взять пространство $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Множество M при этом по-прежнему будет задаваться в пространстве абсолютно непрерывных функций, но компактно оно должно быть в пространстве $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

В пятом параграфе найдены достаточные условия выживаемости для системы с последействием и множеством M, заданным одним уравнением.

Обозначим

$$\mathfrak{X} \doteq AC_0([-r,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{Y} \doteq L_1([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n.$$

Пусть множество $M \subset \mathfrak{X}$ определено равенством

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a(\varphi) = 0\},$$

где отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$a(\varphi) \doteq \beta(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\varphi(s))ds, \tag{6}$$

$\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$— непрерывные функции.

Т е о р е м а 5. *Пусть*

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a(\varphi) = 0\},$$

где отображение $a : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ определено равенством (6) *с функциями $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемыми по x. Пусть далее, для множества M выполнены следующие условия*

1) *во всех точках $\varphi \in M$ выполнено неравенство*

$$\left|\beta'(x)|_{x=\varphi(0)}\right| + \int_{-r}^{0} \left|\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) *во всех точках $\varphi \in M$ выполнено равенство*

$$\langle \beta'(x)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle \alpha_x{}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot{\varphi}(s)\rangle ds = 0.$$

Тогда для всех точек $\varphi \in M$ существуют число $\vartheta > 0$ и отображение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r,\vartheta]$ являющееся решением задачи (2), (3) *такие, что для всех $t \in [0,\vartheta]$ выполнено включение $x_t \in M$.*

В шестом параграфе найдены достаточные условия выживаемости для системы с последействием и множеством M, заданном конечным числом уравнений.

Т е о р е м а 6. *Пусть*

$$M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : a_1(\varphi) = 0, \ldots a_m(\varphi) = 0\},$$

где отображение $a_i : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ *есть*

$$a_i(\varphi) \doteq \beta_i(\varphi(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha_i(s, \varphi(s))ds,$$

с функциями $\beta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha_i : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемыми по* x. *Пусть далее, во всех точках* $\varphi \in M$ *выполнены следующие условия:*

1) *для всех* $i = 1, \ldots, m$ *выполнены неравенства*

$$\left|\beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}\right| + \int_{-r}^{0} \left|{\alpha_{i_x}}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) *функционалы* $a_i'(\varphi)[\cdot] \in \mathfrak{X}^*$, $i = 1, \ldots, m$ *линейно независимы, где*

$$a_i'(\varphi)[\psi] = \langle \beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}, \psi(0)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_{i_x}}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \psi(s)\rangle ds$$

3) *для всех* $i = 1, \ldots, m$ *имеют место равенства*

$$\langle \beta_i'(x)|_{x=\varphi(0)}, f(\varphi)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle {\alpha_{i_x}}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot\varphi(s)\rangle ds = 0.$$

Тогда для всех точек $\varphi \in M$ *существуют число* $\vartheta > 0$ *и отображение* $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, 0]$ *являющееся решением задачи* (2), (3) *такие, что для всех* $t \in [0, \vartheta]$ *выполнено включение* $x_t \in M$.

В седьмом параграфе рассмотрены смешанные системы:

$$\begin{cases} \dot x(t) = f(x_t, y(t)) \\ \dot y(t) = g(x_t, y(t)), \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} x_0 = \varphi \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{8}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y, y_0 \in \mathbb{R}^m$, $\varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $f : C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. В таком виде можно записать, например, задачу Коши для неавтономной системы уравнений с последействием

$$\dot x(t) = f(t, x_t),$$

$$x(t_0) = \varphi.$$

Решением системы (7), (8) называются непрерывные функции

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \vartheta), \quad t \to y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, \vartheta)$$

$\vartheta > 0$, такие, что

1) $x(s) = \varphi(s)$, $s \in [-r, 0]$;

2) $y(0) = y_0$;

3) $x(t)$ и $y(t)$ абсолютно непрерывны на $[0, \vartheta)$ и обращают систему (7) в тождество.

Для смешанных систем найдены условия выживания в множестве M, заданном в пространстве $AC_0([-r,0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m$ одним уравнением.

Теорема 7. *Пусть*

$$M \doteq \{(\varphi, y) \in AC_0([-r,0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m : a(\varphi, y) = 0\},$$

где отображение $a : C([-r,0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *определено равенством*

$$a(\varphi, y) \doteq \beta(\varphi(0), y) + \int_{-r}^{0} \alpha(s, \varphi(s))ds,$$

с функциями $\beta : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемыми по* x. *Пусть далее, для множества* M *выполнены следующие условия*

1) *во всех точках* $(\varphi, y) \in M$ *выполнено неравенство*

$$\left|\beta_x{}'(x,y)|_{x=\varphi(0)}\right| + |\beta_y{}'(\varphi(0), y)| + \int_{-r}^{0} \left|\alpha_x{}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}\right| ds \neq 0;$$

2) *во всех точках* $(\varphi, y) \in M$ *выполнено равенство*

$$\langle \beta_x{}'(\varphi(0), y), f(\varphi, y)\rangle + \langle \beta_y{}'(\varphi(0), y), g(\varphi, y)\rangle + \int_{-r}^{0} \langle \alpha_x{}'(s,x)|_{x=\varphi(s)}, \dot\varphi(s)\rangle ds = 0$$

Тогда для всех точек $(\varphi, y_0) \in M$ *существуют* $\vartheta > 0$ *и отображения*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \vartheta], \quad t \to y(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, \vartheta],$$

являющиеся решением задачи (7), (8) *такие, что для всех* $t \in [0, \vartheta]$ *выполнено включение* $(x_t, y(t)) \in M$.

В восьмом параграфе исследованы условия, при которых для заданных непустого множества M банахова пространства $\mathfrak{X}$ и многозначной функции $x \to F(x) \in \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$, $x \in M$ порождающей задачу

$$\delta x_t \in F(x_t), \tag{9}$$

$$x_0 = \varphi \in M, \tag{10}$$

найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x_t$ задачи (9), (10) удовлетворяющее при всех $t \in [0, \alpha]$ включению $x_t \in M$.

Введем следующие обозначения. Напомним, что функция $r(t)$ и последовательность $\{t_i\}$ в определении касательного направления зависят от точки $x \in M$ и элемента касательного конуса $h \in T_x^{\mathfrak{Y}} M$. Эту зависимость будем записывать $r(t, x, h)$ и $t_i(x, h)$.

Т е о р е м а 8. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$— банаховы пространства, $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ и задано замкнутое многозначное отображение*

$$F : \mathfrak{X} \to \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$$

с областью определения $D(F)$. Пусть далее, задано локально компактное множество M в $D(F)$ и выполнены условия:

1) для всех $x \in M$ отображение $x \to H(x) \in \operatorname{comp}\mathfrak{Y}$, $x \in M$ построенное по правилу

$$H(x) = F(x) \cap T_x^{\mathfrak{Y}} M$$

является полунепрерывным сверху ;

2) найдется константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in M$ выполнено неравенство

$$\sup_{x \in M} c(x) < c,$$

где

$$c(x) \doteq \sup_{h \in H(x)} \Big\{ \sup_i \Big\| h + \frac{r(t_i(x,h), x, h)}{t_i(x,h)} \Big\|_{\mathfrak{X}} \Big\}.$$

Тогда для всякого $\varphi \in M$ существуют число $\alpha > 0$ и непрерывное отображение

$$t \to x_t \in M, \quad t \in [0, \alpha]$$

такое, что

$$x_0 = \varphi \quad \text{и} \quad \delta x_t \in F(x_t)$$

для почти всех $t \in [0, \alpha)$.

Доказано, что в теореме 8 условие полунепрерывности сверху многозначного отображения F можно заменить на более слабое: достаточно замкнутости многозначного отображения F в смысле замкнутости графика $\Gamma(F)$ в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.

В девятом параграфе доказано взаимно однозначное соответствие между задачей Коши для включения

$$\dot{x}(t) \in f(x_t), \tag{11}$$

$$x_0 = \varphi, \tag{12}$$

где $f : AC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$, $\varphi \in AC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ и задачей Коши для включения

$$\delta x_t \in F(x_t), \tag{13}$$

$$x_0 = \varphi, \tag{14}$$

где $F : AC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to L_1([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$ действует по правилу

$$F(\sigma) \doteq (\dot{\sigma}, f(\sigma)).$$

Л е м м а 4. *Включения* (11) *и* (13) *эквивалентны в том смысле, что если функция*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \alpha), \quad \alpha > 0,$$

является решением задачи (11), (12), *то отображение*

$$t \to x_t \in \mathfrak{X}, \quad t \in [0, \alpha)$$

построенное по правилу

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in [0, \alpha), \quad s \in [-r, 0],$$

имеет для почти всех $t \in [0, \alpha)$ *вариацию* δx_t *и является решением задачи* (13), (14).

И наоборот, если отображение

$$t \to y_t, \quad t \in [0, \alpha), \quad \alpha > 0$$

является решением задачи (13), (14), *то отображение*

$$t \to x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [-r, \alpha)$$

где

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-r, 0], \quad x(t) = y_t(0), \quad t \in [0, \alpha)$$

является решением задачи (11), (12).

Таким образом имеет место теорема.

Т е о р е м а 9. *Рассмотрим некоторое локально компактное множество* $M \subset AC_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$. *Для того, чтобы существовало движение* $t \to x_t \in M$, *порожденное дифференциальным включением с запаздыванием* $\dot{x}(t) \in f(x_t)$ *и начальным условием* $x_0 = \varphi \in M$, *достаточно, чтобы для всякой точки* $\sigma \in M$ *выполнялось включение*

$$F(\sigma) \subset T_\sigma^{\mathfrak{Y}} M,$$

где $F(\sigma) = (\dot{\sigma}(s), f(\sigma))$, $\mathfrak{Y} = L_1([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$.

Доказана замкнутость отображения F, действующего из пространства $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ в пространство $L_1([-r,0],\mathbb{R}^n) \times \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ по правилу $F(\sigma) = (\sigma(s), f(\sigma))$, где $D(F) = AC_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$— область определения F Таким образом, в теореме 9 пространство абсолютно непрерывных функций $AC_0([-r,0],\mathbb{R}^n)$ можно заменить на пространство непрерывных функций $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Множество M при этом по-прежнему будет задаваться в пространстве абсолютно непрерывных функций, а условие локальной компактности множества M должно быть выполнено в $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Публикации по теме диссертации

1 *Баранов В Н.* Численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск, 2000. № 3(20). С. 3–30.

2. *Баранов В Н* Об одном численном методе интегрирования дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Материалы Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов". Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 2000. С. 319

3. *Баранов В. Н.* Численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Труды XXXII региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург. 29 января - 2 февраля 2001 г. С. 87–91.

4. *Баранов В. Н.* Обобщение теоремы Нагумо для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тезисы докладов 5-й Российской университетско-академической научно-практической конференции. Ч. 10. Ижевск, 2001. С. 8.

5. *Баранов В. Н.* Теорема Нагумо для системы с последействием // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск, 2002. № 2(25). С. 11–14.

6. *Баранов В. Н.* Теорема Нагумо для систем с последействием // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 2002. Вып 1. С. 29–32.

7. *Баранов В. Н.* Достаточные условия выживания для систем с последействием // Вестн. Тамбовского ун-та. Тамбов, 2003. Т. 8. Вып. 3. С. 343.

8. *Баранов В. Н.* Достаточные условия локальной выживаемости для систем с последействием // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 858.

9. *Баранов В. Н.* Задачи выживания для систем с последействием // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск, 2003. № 2(28). С. 3–102.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 2.12.2003. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,05. Тираж 100 экз. Заказ № 2374.

Типография Удмуртского государственного университета
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.